УДК 517.9

А. С. Миненко

О ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Рассматривается краевая задача со свободной границей, имеющая гидродинамическое содержание. Используя вариационный подход, доказывается классическая разрешимость этой задачи и строится приближенное решение ее, основанное на методе Ритца. Устанавливается сходимость приближенного решения к точному в равномерной метрике.

Широкий класс нелинейных краевых задач со свободной границей, имеющий вариационную природу, эффективно исследуется методом интегральных функционалов с неизвестной областью интегрирования. При этом задачи могут иметь как теплофизическое, так и гидродинамическое содержа-

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1993. Вып. 5.

ние [1, 4]. Указанный подход позволяет также решить задачу численно, используя метод Ритца [2]. В настоящей работе дальнейшее развитие получил вариационный подход при рассмотрении задачи вихревого течения жидкости с интенсивностью вихря $\omega = \mathrm{const} > 0$, когда на свободной границе задается условие Бернулли. Доказывается классическая разрешимость задачи и дается обоснование сходимости приближений Ритца к точному решению в равномерной метрике. Доказательство теоремы существования основано на результатах, развитых в работах [6, 7].

1. Постановка задачи. Пусть D — область, ограниченная снизу отрезком $A = (0 \leqslant x \leqslant a,\ y = 0)$, по бокам вертикалями $Q_1 = (x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \leqslant c)$, $Q_2 = (x = a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$ и сверху кривой $P: y = g(x),\ 0 \leqslant x \leqslant a$, где $c < b$, $g(0) = c$, $g(a) = b$, а $g(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая функция, причем $g'(0) = 0$. Далее, пусть γ — достаточно гладкая кривая без самопересечений, расположенная в $D \cup P$. Одним концом γ служит точка $(0, c)$, а другой расположен на вертикали Q_2, причем все точки γ, исключая точку $(0, c)$, находятся выше горизонтали $y = c$. Через $D_\gamma \subset D$ будем обозначать область, ограниченную отрезком A, вертикалями Q_1, Q_2 и кривой γ.

Рассмотрим краевую задачу со свободной границей γ. Требуется определить пару (ψ, γ), где $\psi(x, y)$ — функция тока, по следующим условиям:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega, \quad (x, y) \in D_\gamma, \tag{1}$$

$$\psi(x, y) = -1, \quad (x, y) \in A, \tag{2}$$

$$\psi_x(x, y) = 0, \quad (x, y) \in Q_1 \cup Q_2, \tag{3}$$

$$\psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \gamma, \tag{4}$$

$$\psi_x^2(x, y) + \psi_y^2(x, y) \geqslant v^2(x, y), \quad (x, y) \in \gamma, \tag{5}$$

причем на части γ, лежащей внутри D, в последнем условии всегда должно выполняться равенство. Относительно функции $v(x, y)$ будем предполагать, что она непрерывна вместе с частными производными первого порядка в замыкании области D и удовлетворяет там условиям

$$v(x, y) > 0, \quad v_x(x, y) \leqslant 0, \quad v_y(x, y) \geqslant 0. \tag{6}$$

Задача (1) — (5) возникает при изучении струйных течений жидкости в достаточно длинной, но конечной части области D. Существенным отличием этой задачи от рассматриваемых ранее [3] является то, что на части γ, совпадающей с P, в условии (5) должно выполняться неравенство.

2. Вариационная постановка задачи (1) — (5). Рассмотрим функционал с неизвестной областью интегрирования

$$J(\psi, \gamma) = \iint\limits_{D_\gamma} (\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2\omega\psi + v^2(x, y))\, dxdy \tag{7}$$

на множестве R допустимых пар (ψ, y), удовлетворяющих следующим условиям: γ — жорданова дуга, расположенная в $D \cup P$, концами которой являются точки $(0, c)$ и (a, b), причем все точки γ, исключая $(0, c)$, расположены выше горизонтали $y = c$; функция $\psi(x, y)$ непрерывна в замыкании области D_γ, равна нулю на γ, минус единице на A и имеет непрерывно дифференцируемые производные в D_γ, причем $J(\psi, \gamma) < \infty$. Справедлива лемма.

Лемма 1. Пусть пара (ψ, γ) является классическим решением задачи (1) — (5). Тогда эта пара будет стационарной для функционала (7) на множестве R. И наоборот, каждая стационарная пара (ψ, γ) функционала (7) на множестве R, где γ — достаточно гладкая кривая, является решением задачи (1) — (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы первой вариации интегрального функционала с неизвестной областью интегрирования следует, что

$$\delta J(\psi, D_\gamma; \overline{\delta\psi}, \overrightarrow{\delta z}) = -2 \iint\limits_{D_\gamma} (\psi_{xx} + \psi_{yy} - \omega)\, \overline{\delta\psi}\, dxdy +$$

$$+ \int\limits_\gamma (v^2(x, y) - \psi_x^2 - \psi_y^2) \cdot (\vec{n}, \overrightarrow{\delta z})\, ds + 2 \int\limits_{Q_1 \cup Q_2} \psi_x \overline{\delta\psi}\, dy, \tag{8}$$

где $\overline{\delta\psi}$ — вариация функции $\psi(x, y)$ при известной области D_γ, $\vec{\delta z} = (\delta x, \delta y)$ — вариация независимых переменных, описывающая переход от γ к некоторой близкой допустимой кривой, а $\vec{n}$ — внешняя нормаль. Учитывая теперь, что каждую из компонент пары (ψ, γ) можно варьировать независимо одна от другой в пределах допустимости, получаем утверждение леммы. При этом заметим, что на части γ, совпадающей с P, должно выполняться условие $(\vec{n}, \vec{\delta z}) \geqslant 0$. Это означает, что в этом случае в условии (5) всегда будет неравенство.

Лемма 1 позволяет свести нелинейную краевую задачу (1) — (5) к проблеме минимума функционала (7) на множестве R.

3. Решение линейной задачи (1) — (4). Пусть γ — фиксированная допустимая кривая, т. е. область D_γ считается заданной. Для построения решения линейной задачи (1) — (4) введем в рассмотрение множество U допустимых функций $\psi(x, y)$, непрерывных в $\overline{D}_\gamma$, непрерывно дифференцируемых в D_γ, равных минус единице на A, нулю на γ и таких, что функционал

$$M(\psi) = \iint\limits_{D_\gamma} (\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2\omega\psi)\, dxdy \tag{9}$$

всегда принимает на U конечные значения.

Лемма 2. Существует единственная функция $\psi(x, y) \in U$, на которой функционал (9) достигает своего наименьшего значения. Эта функция является единственным решением задачи (1) — (4). Если дополнительно предположить спрямляемость кривой γ, тогда имеет место также следующее представление:

$$J(\psi, \gamma) = \int\limits_A \psi_y(x, 0)\, dx + \iint\limits_{D_\gamma} (\omega\psi + v^2(x, y))\, dxdy. \tag{10}$$

Доказательство леммы проводится аналогично тому, как это сделано в работе [1].

4. Симметризация области D_γ. Симметризация области относительно осей координат по Штейнеру [6] определяется через симметризацию дополнения $\Omega = \Pi \setminus D_\gamma$, $\Pi = (0 < x < a,\ 0 < y < b)$, относительно оси x и прямой $y = b$ с последующим продолжением функции $\psi(x, y)$ нулем в Ω. Справедлива лемма о симметризации.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (6) и пусть $\psi(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в области D_γ, а $\psi^*(x, y)$ — решение этой же задачи в области D^*, со свободной границей γ^*, полученной из D_γ при помощи симметризации относительно осей координат. Тогда

$$J(\psi^*, \gamma^*) \leqslant J(\psi, \gamma), \tag{11}$$

причем $\psi_x^*(x, y) < 0$, $\psi_y^*(x, y) > 0$ при $(x, y) \in D^*$, а γ^* задается уравнением

$$x = x(t),\ y = y(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{12}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — монотонно возрастающие функции при $t \in [0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале рассмотрим симметризацию относительно оси x. Смысл ее состоит в том, что при каждом фиксированном $x_0 \in [0, a]$ функция $\psi(x_0, y)$ заменяется возрастающей функцией $\psi^*(x_0, y)$, такой, что при любом вещественном r справедливо равенство $\operatorname{mes}\{y : \psi(x_0, y) < r\} = \operatorname{mes}\{y : \psi^*(x_0, y) < r\}$. Пусть D^* — область, полученная из D_γ при помощи симметризации относительно оси x, γ^* — соответствующая ей свободная граница. Тогда аналогично работе [1] можно установить убывание интеграла Дирихле при переходе от пары (ψ, γ) к новой паре (ψ^*, γ^*). Справедливы также соотношения

$$\iint\limits_{D^*} \psi^*(x, y) = \iint\limits_{D_\gamma} \psi dxdy, \quad \iint\limits_{D^*} v^2(x, y)\, dxdy \leqslant \iint\limits_{D_\gamma} v^2(x, y)\, dxdy$$

Первое вытекает непосредственно из свойств симметризации, а второе — следствие условия (6). Отсюда следует неравенство (11). Заменим теперь функцию $\psi^*(x, y)$ решением задачи (1) — (4) в области D^*. Тогда в силу леммы 2 неравенство (11) только усилится. Поступая точно так же при симметризации области D^* относительно прямой $y = b$, докажем утверждение леммы.

5. **Доказательство теоремы существования.** Пусть d — точная нижняя грань функционала (7) на множестве R и (ψ_n, D_n) — минимизирующая последовательность. В силу леммы 3 эту последовательность можно считать состоящей из областей D_n, свободные границы которых задаются уравнениями типа (12). Далее, лемма 2 позволяет в качестве функций $\psi_n(x, y)$ брать решения задачи (1) — (4) в области D_n. Вследствие монотонности γ_n можно выделить последовательность, равномерно сходящуюся к некоторой предельной кривой γ, в системе координат (ξ, η), повернутой относительно (x, y) на угол $\pi/4$ против часовой стрелки. При этом предельная кривая γ может оказаться недопустимой, так как может содержать общий отрезок с вертикалью Q_2, а также с прямой $y = c$. Для доказательства компактности последовательности $\psi_n(x, y)$ воспользуемся представлением $\psi_n(x, y) = \zeta_n(x, y) + \omega y^2/2$ при $(x, y) \in \overline{D}_n$, где $\zeta_n(x, y)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая граничным условиям (2), (3) и условию $\zeta_n(x, y) = -\omega y^2/2$ при $(x, y) \in \gamma_n$. Предположим теперь, что выполняется условие

$$1 - \frac{\omega}{2} c^2 > 0. \tag{13}$$

Тогда применив принцип максимума, получим следующую оценку: $-1 \leqslant \zeta_n(x, y) \leqslant -\omega c^2/2$ при $(x, y) \in \overline{D}_n$. Отсюда следует компактность $\psi_n(x, y)$ на любом замкнутом множестве, не содержащем γ. Далее, аналогично тому, как это сделано в работе [1], доказывается, что предельная функция $\psi(x, y)$ является решением задачи (1) — (4) в D_γ и $J(\psi, \gamma) < \infty$. Применив теперь лемму 2, получим

$$\iint\limits_{D_\gamma} (|\nabla\psi|^2 + 2\omega\psi + v^2)\, dxdy = \int\limits_A \psi_y(x, 0)\, dx + \iint\limits_{D_\gamma} (\omega\psi + v^2)\, dxdy.$$

Воспользовавшись затем равномерной сходимостью $\psi_{ny}(x, 0) \rightrightarrows \psi_y(x, 0)$ на отрезке A, установим, что $J(\psi, \gamma) = d$. Используя внутренние вариации Шиффера, можно показать также, что условие (5) на части γ, лежащей внутри D, выполняется почти всюду.

Дальнейшее исследование предельной пары (ψ, γ) проводится в следующей лемме.

Лемма 4. Пусть выполнено условие (13) и пусть справедливы неравенства

$$v(x, y) < \left(\frac{1}{c} - \frac{\omega}{2} c\right), \ (x, y) \in \overline{D}; \ \omega \operatorname{mes} D + \left(1 - \frac{\omega}{2} c^2\right)\frac{1}{c} < \int\limits_P v(x, y)\, ds. \tag{14}$$

Тогда все точки предельной кривой γ, исключая $(0, c)$, лежат выше горизонтали $y = c$ и D_γ не может целиком совпадать с D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим обратное. Пусть γ совпадает с отрезком $\gamma_0 = (0 \leqslant x \leqslant a, y = c)$. Обозначим через $\psi_0(x, y)$ решение задачи (1) — (4) в $D_{\gamma_0} = (0 < x < a, 0 < y < c)$. Очевидно, что

$$\psi_0(x, y) = \frac{\omega}{2} y^2 + \left(1 - \frac{\omega}{2} c^2\right)\frac{y}{c}, \quad (x, y) \in \overline{D}_{\gamma_0}.$$

Вычислим вариацию функционала (7) на паре (ψ_0, γ_0) при малых значениях $\max|\overrightarrow{\delta z}|$, $(\overrightarrow{\delta z}, \vec{n}) \geqslant 0$ и $\overrightarrow{\delta z} = 0$ в точках $(0, c)$ и (a, c). На основании формулы (8) имеем

$$\delta J(\psi, D_{\gamma_0}; \overline{\delta\psi}, \overrightarrow{\delta z}) = \int\limits_{\gamma_0} \left[v^2 - \left(\frac{1}{c} - \frac{\omega}{2} c\right)^2\right](\overrightarrow{\delta z}, \vec{n})\, ds < 0.$$

Следовательно, для проварьированной области $\tilde{D}_\gamma$ и решения $\tilde{\psi}(x, y)$ задачи (1) — (4) в ней будем иметь $J(\tilde{\psi}, \tilde{\gamma}) < J(\psi, \gamma) = J(\psi, \gamma_0) = J(\psi_0, \gamma_0) =$

$= d$ (здесь $\tilde{\gamma}$ — свободная граница области $\tilde{D}_\gamma$). Пусть теперь $\psi^*(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в области D^*, полученной из D_γ при помощи симметризации относительно осей координат. Построим допустимую кривую γ', состоящую из части γ^* так, чтобы $D_{\gamma^*} \in D_{\gamma'}$. Пусть $\psi'(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в области $D_{\gamma'}$. Тогда из неравенства

$$d \leqslant J(\psi', \gamma') \leqslant J(\psi^*, \gamma^*) + \iint\limits_{D_{\gamma'} \setminus D_{\gamma^*}} v^2(x, y)\, dxdy + \omega \operatorname{mes}(D_{\gamma'} D_{\gamma^*}) < d,$$

справедливого при достаточно малых значениях величины $\operatorname{mes}(D_{\gamma'} \setminus D_{\gamma^*})$, следует противоречие, так как $(\psi', \gamma') \in R$. Аналогично исследуются остальные случаи.

Рассмотрим теперь вторую часть леммы. Предположим, что D_ν совпадает с D. Тогда, применив формулу Грина, получим

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, ds = \omega \operatorname{mes} D + \int\limits_{A} \psi_y(x, 0)\, dx,$$

откуда в силу оценки $\psi_y(x, 0) \leqslant (1 - \omega c^2/2)/c$ при $0 \leqslant x \leqslant a$ следует неравенство

$$\int\limits_{P} v(x, y)\, ds \leqslant \omega \operatorname{mes} D + \left(1 - \frac{\omega}{2} c^2\right) \frac{1}{c},$$

противоречащее второму условию (14). Следовательно, D_γ не может совпадать с D, т. е. $D_\gamma \subset D$. Лемма доказана.

Наконец, применяя методику работы [1] в предположении аналитичности функции $v(x, y)$ по переменным x, y в D, можно показать, что γ является аналитической дугой в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри D. Сформулируем теперь теорему существования.

Теорема 1. Пусть $v(x, y)$ — аналитическая функция по переменным x, y в D, непрерывна в $\bar{D}$, и пусть выполнены условия (6), (13) и (14). Предположим также, что P — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, причем $g(0) = c$, $g(a) = b$, $g'(0) = 0$. Тогда существует единственное решение задачи (1) — (5). При этом пара (ψ, γ) удовлетворяет следующим условиям: γ — монотонно возрастающая дуга, аналитическая в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри D, $\psi(x, y)$ — функция, непрерывная в $\bar{D}_\gamma$, непрерывно дифференцируемая всюду в $\bar{D}_\gamma$, исключая точки $(0, c)$ и (a, h), $c < h \leqslant b$, являющиеся концами γ, и $\psi_y(x, y) > 0$ в D_γ.

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда предельная кривая γ содержит отрезок $x = a$, $h \leqslant y \leqslant b$, где $c < h$. Обозначим через γ_0 часть γ, лежащую в D, концами которой служат точки $(0, c)$ и (a, h), и пусть $\psi_0(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в D_{γ_0}. Легко проверить, что $J(\psi, \gamma) = J(\psi_0, \gamma_0) = d$. Далее, пара (ψ_0, γ_0) является решением задачи о минимуме функционала (7) на множестве допустимых пар R_h, где R_h отличается от R лишь тем, что концы γ проходят через точки $(0, c)$ и (a, h). Это характеризует тот случай постановки задачи (1) — (5), когда правый конец γ лежит на отрезке $c < y < b$, $x = a$. Теорема доказана.

6. Построение приближений Ритца. В дальнейшем будем предполагать, что решение задачи (1) — (5) удовлетворяет условиям $\psi(x, y) \in C^1(\bar{D}_\gamma)$ и $\psi_y(x, y) > 0$, $(x, y) \in \bar{D}_\gamma$, а γ и P имеют конечное число общих точек. Функционал (7) в классе функций $\psi_y(x, y) > 0$, $(x, y) \in \bar{D}_\gamma$, представим следующим образом:

$$J_1(z) = \iint\limits_{\Delta} \left[\left(z_x + \frac{g_x}{g} z \right)^2 + v^2 z_\varphi^2 + 2\omega(\varphi - 1) z_\varphi^2 \right] \frac{g}{z_\varphi}\, dx d\varphi, \qquad (15)$$

где $\Delta = (0 < x < a,\ 0 < \varphi < 1)$, $\varphi(x, z) = \psi(x, z\, g(x)) + 1$, $z(x, \varphi)$ — решение уравнения $\varphi(x, z) - \varphi = 0$. Будем минимизировать функционал (15) на следующем множестве допустимых функций:

$$G_z = \{z : z \in C^1(\bar{\Delta}),\ z(0, 1) = 1,\ z(x, 0) = 0,\ \min_{(x, \varphi) \in \bar{\Delta}} z_\varphi > 0\}. \qquad (16)$$

Обозначим через $z_0(x, \varphi)$ функцию, соответствующую решению задачи (1) — (5). Очевидно, что $z_0(x, \varphi) \in G_z$. Используем теперь формулу Фридрихса:

$$J_1(z) = J_1(z_0) + \frac{d}{d\varepsilon} J_1(\overset{(\varepsilon)}{z})\Big|_{\varepsilon=0} + \int_0^1 (1-\varepsilon) \frac{d^2 J_1(\overset{(\varepsilon)}{z})}{d\varepsilon^2} d\varepsilon, \tag{17}$$

$$\frac{d^2 J_1(\overset{(\varepsilon)}{z})}{d\varepsilon^2} = 2 \iint_\Delta \left\{\left[\overset{(\varepsilon)}{z}\left(\delta z_x + \frac{g_x}{g}\delta z\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \delta z_\varphi \left(\overset{(\varepsilon)}{z}_x + \frac{g_x}{g}\overset{(\varepsilon)}{z}\right)\right]^2 + \frac{dz_\varphi^2}{g^2}\right\} \frac{g}{\overset{(\varepsilon)}{z}{}_\varphi^3} dxdy + \int_0^1 \upsilon(x)\delta z^2(x,1)\frac{d}{dz}\upsilon^2 dx,$$

где z — произвольный элемент из G, $\overset{(\varepsilon)}{z} = z_0 + \varepsilon(z - z_0)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Учитывая, что первая вариация функционала (15), вычисленная на элементе $z_0(x, \varphi)$, неотрицательна, заключаем, что $z_0(x, \varphi)$ доставляет наименьшее значение функционалу $J_1(z)$ на множестве G_z. Далее, функционал (15) будем минимизировать на множестве (16) при помощи сумм

$$z_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j \varphi^k, \quad n = \sup_{1 \leqslant k \leqslant m}(k + m_k). \tag{18}$$

Неизвестные коэффициенты a_{kj}, принадлежащие множеству допустимости G_r, где

$$r = \sum_{k=1}^{m}(1 + m_k),\ G_r = E_r^0 \cap G_r^+,\ E_r^0 : \sum_{k=1}^{m} a_{k0} - 1 = 0,$$

$$G_r^+ = \{a_{kj} : z_n(x, \varphi) \in C^1(\bar\Delta),\ z_n(x, 0) = 0,\ \min_{(x,\varphi)\in\bar\Delta} z_{n\varphi}(x, \varphi) > 0\}$$

определяются из нелинейной системы Ритца:

$$\frac{\partial J_2}{\partial a_{pq}}(a_{kj}) + \lambda = 0,\ p = 1, 2, \ldots, m, q = 0,$$

$$\frac{\partial J_2(a_{kj})}{\partial a_{pq}} = 0, \quad q = 1, 2, \ldots, m_p;\ p = 1, 2, \ldots, m, \tag{19}$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_{k0} - 1 = 0,\ J_2(a_{kj}) = J_1\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j \varphi^k\right).$$

Здесь λ — множитель Лагранжа. Нетрудно проверить, что функция $J_2(a_{kj})$ достигает своего наименьшего значения в некоторой внутренней точке множества G_r, находящейся на конечном расстоянии от начала координат. Следовательно, система уравнений (19) всегда имеет решение, причем единственное.

Перейдем теперь к доказательству сходимости приближений Ритца (18) к точному решению $z_0(x, \varphi)$. Справедлива лемма.

Лемма 5. Пусть функция $z_0(x, \varphi) \in W_2^l(\Delta)$, где $l \geqslant 4$. Тогда можно построить допустимый многочлен

$$u_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj} x^j \varphi^k, \quad n \leqslant m,$$

такой, что

$$\| z_0 - u_n \|^2_{W_2^1(\Delta)} = O\left(\frac{1}{n^{2(l-2)}}\right). \tag{20}$$

Доказательство. Введем новые переменные (ξ, ζ) по формулам

$$x = 2a(\tau - t^2),\ \cos\frac{\xi}{2} = 1 - \tau^2;\ \varphi = 2(\theta - t_1),\ \cos\frac{\zeta}{2} = 1 - \theta^2,$$

где t_1, t_2 — произвольные числа из интервала $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Положим теперь $z(x(\xi), \varphi(\zeta)) = u(\xi, \zeta)$. Очевидно, что $u(\xi, \zeta) \in W_2^l(\Delta_1)$, где $\Delta_1 = (\xi_1 <$

$< \xi < \xi_2, \zeta_1 < \zeta < \zeta_2)$, $\xi_1 = 2\arccos(1 - t_2^2)$, $\xi_2 = 2\arccos[1 - (t_2 + 0{,}5)^2]$, $\zeta_1 = 2\arccos(1 - t_1^2)$, $\zeta_2 = 2\arccos[1 - (t_1 + 0{,}5)^2]$. Продолжим затем функцию $u(\xi, \zeta)$ на прямоугольник $\Delta^* = (0 < \xi < \pi, 0 < \zeta < \pi)$ с сохранением класса таким образом, чтобы продолженная функция u^* и все ее производные до порядка l включительно обращались в ноль в некоторой приграничной полоске области Δ^*. Разлагая теперь функцию $u^*(\xi, \zeta)$ в ряд Фурье по косинусам и пользуясь равенством Парсеваля, нетрудно установить необходимую оценку (20).

Теорема 2. Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и леммы 5. Тогда последовательность приближений Ритца (18) сходится к точному решению $z_0(x, \varphi)$ по норме в $C(\overline{\Delta})$ и $W_2^1(\Delta)$.

Доказательство. Последовательность многочленов (18), коэффициенты которых удовлетворяют системе (19), образует минимизирующую последовательность для функционала (15) на множестве (16). Следовательно, всегда можно считать, что $\varepsilon_n = J(z_n) - J(z_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Далее, из формулы (17) следует, что

$$\int_0^1 (1-\varepsilon) \frac{d^2 J_2 (\overset{(\varepsilon)}{z})}{d\varepsilon^2} d\varepsilon \leqslant \varepsilon_n,$$

где $\overset{(\varepsilon)}{z} = z_0 + \varepsilon(z_n - z_0)$. Используя теперь лемму 5, можно показать, что величина ε_n имеет следующий порядок: $\varepsilon_n = O(1/n^{2(l-2)})$. Применяя затем теорему А. А. Маркова к многочлену $\eta_n(x, \varphi) = z_n(x, \varphi) - z_0(x, \varphi)$, из последнего неравенства после интегрирования следуют оценки

$$\iint_\Delta \eta_{n\varphi}^2 \, dx d\varphi \leqslant c_1 \mu_n, \quad \iint_\Delta \eta_n^2 \, dx d\varphi \leqslant c_2 \mu_n, \quad \iint_\Delta \eta_{nx}^2 \, dx d\varphi \leqslant c_3 \mu_n, \tag{21}$$

где

$$\mu_n = \frac{2M_0^2}{c}(M_0 + 2n^2 M_n), \quad M_0 = \max_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta}} z_{0\varphi}, \quad M_n = \max_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta}} |\eta_n|,$$

c_1, c_2, c_3 — некоторые постоянные. Воспользовавшись теперь результатами Л. В. Канторовича для минимизации квадратичного функционала [5] и учитывая порядок величины ε_n при $l = 4$, получаем

$$\sqrt{M_n} \leqslant A_1 \sqrt{\frac{6}{n^2}\ln n + \frac{6}{n^2}\ln M_n} + A_2 \frac{1}{n}, \tag{22}$$

где A_1 и A_2 — некоторые постоянные. Отсюда следует, что $M_n \to 0$ при $n \to \infty$, а так как и $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$, тогда из соотношений (21) и (22) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

В заключение отметим, что замена Фридрихса, на которой основана идея минимизации функционала (7), в монографии [8] использована для приближенного решения задач Стефана.

1. *Миненко А. С.* Об одной теплофизической задаче со свободной границей // Докл АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 6.— С. 413—416.
2. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Там же.— 1978.— № 4.— С. 291—294.
3. *Лаврентьев М. А.* О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй // Мат. сб.— 1938.— 4(46), № 3.— С. 391—453.
4. *Данилюк И. И.* Об интегральных функционалах с переменной областью интегрирования // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1972.— 118.— С. 1—12.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа.— М.; Л. : Гостехиздат, 1949.— 708 с.
6. *Garabedian P. R., Lewy H., Schiffer M.* Axially symmetric cavitational flow // Ann. Math.— 1952.— 56, N 3.— P. 502—560.
7. *Friedrichs K. O.* Ufer ein Minimumproblem fur Potentialstromungen mit freie Rande // Ibid.— 1933.— 109, N 1.— P. 60—80.
8. *Crank J.* Free and moving boundary problems.— Oxford, 1984.— 425 p.

Донец. политехн. ин-т

Получено 30.09.90